Wydział Elektryczny
POLITECHNIKA WARSZAWSKA

Kryteria jakości prognoz - praktyczne implikacje stosowanych miar

dr hab. inż. Dariusz Baczyński, prof. uczelni

dr hab. inż. Paweł Piotrowski, prof. uczelni

dr inż. Marcin Kopyt

Politechnika Warszawska

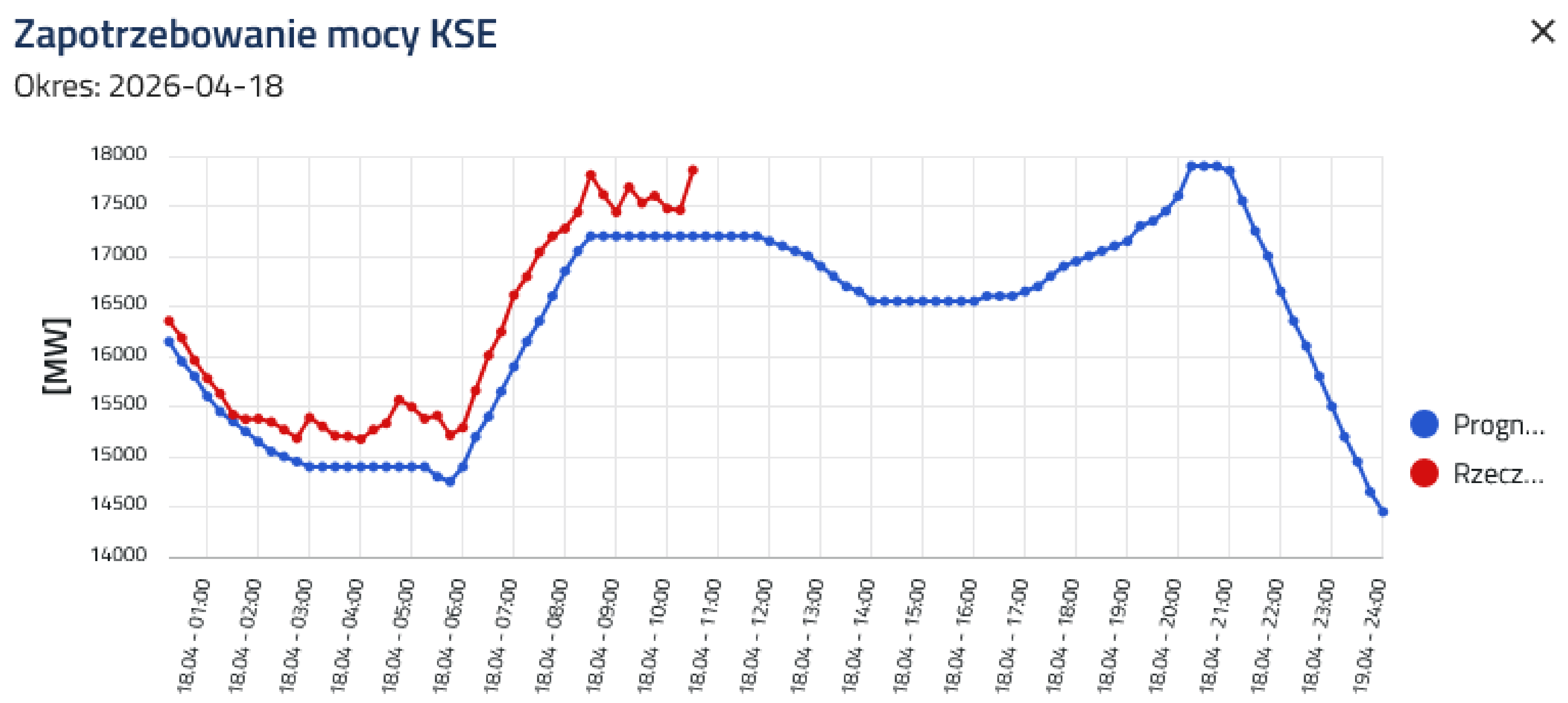
22 kwietnia 2026 roku

Czy prognozowanie jest ważne?

- Bilansowanie systemowe
- Planowanie pracy sieci
- Obrót energią elektryczną
- Planowanie rozwoju
- itp..

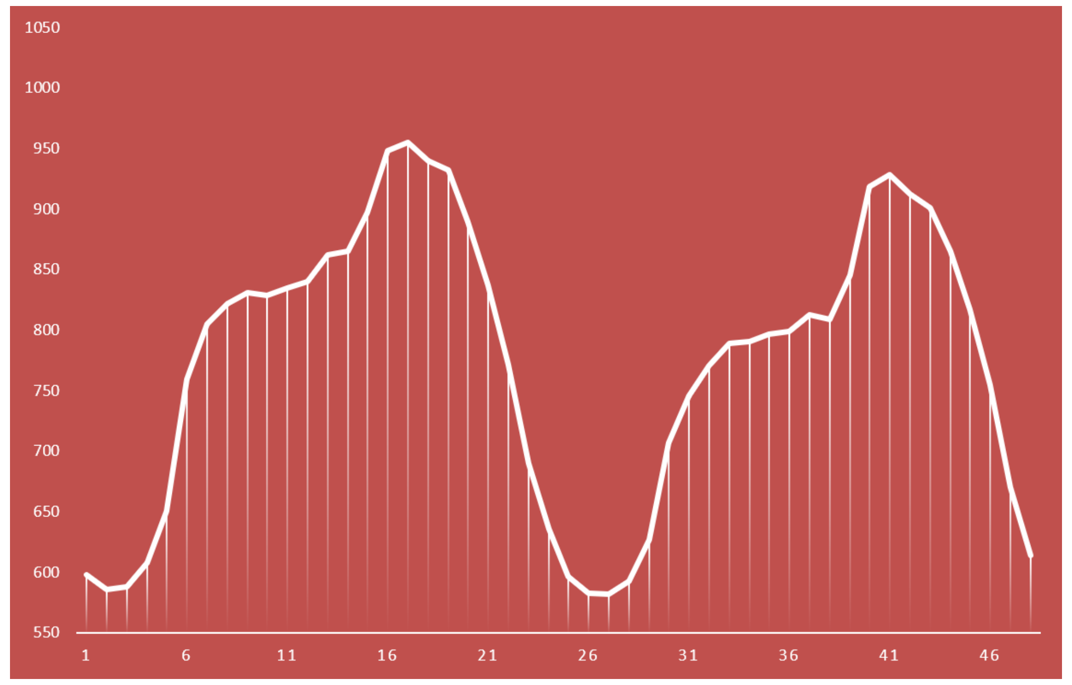
=

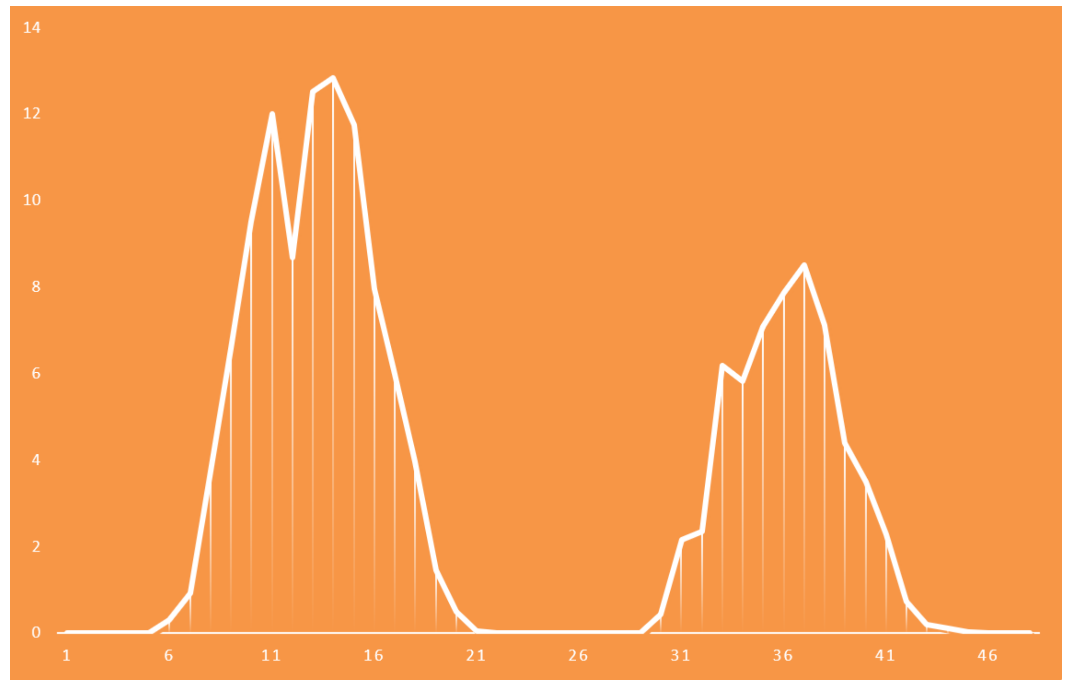
Politechnika
Warszawska

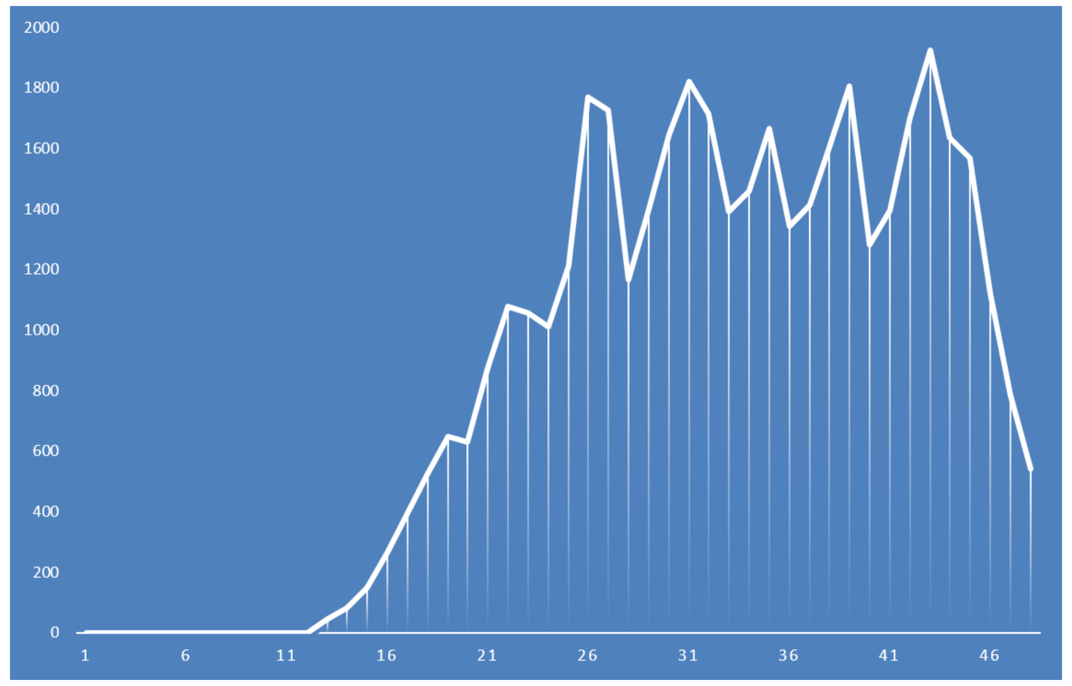


Jakość prognoz

Dla rzetelnego podejmowania decyzji, niezależnie od celu, oprócz samej prognozy istotna jest także informacja o jej spodziewanej lub typowej „jakości”. Dlatego ważnym jest określenie „jakości” prognozy, która to informacja może być wykorzystana do porównywania różnych prognoz oraz szacowania ryzyka związanego z użyciem prognozy.

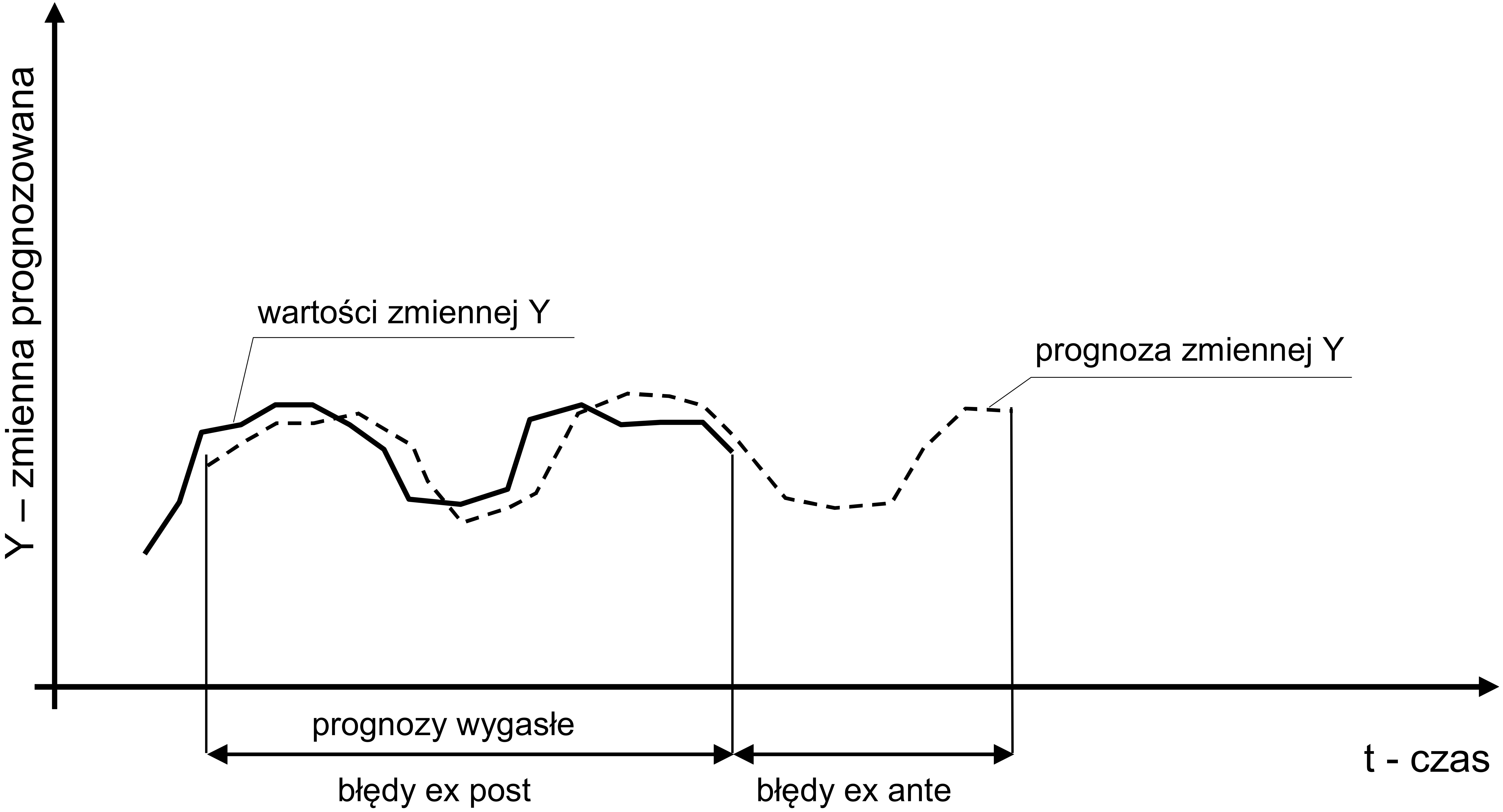






Politechnika Warszawska

Ex-post i ex-ante



Politechnika Warszawska

Ex-post – podstawowe miary dla pojedynczego punktu

Zakładając, że:

y_t - rzeczywista wartość zmiennej prognozowanej y w chwili t,

y_t^* - prognozowana wartość zmiennej y w chwili t.

$E = y_t - y_t^*$ — *E* (*Error*) – najprostszy błąd bezwzględny

$AE = |y_t - y_t^*|$ — *AE* (*Absolute Error*) – moduł błędu bezwzględnego

$APE = \left|\frac{y_t - y_t^*}{y_t}\right| * 100\%$ — *APE* (*Absolute Percentage Error*) – moduł błędu procentowego

$SE = (y_t - y_t^*)^2$ — *SE* (*Square Error*) – kwadrat błędu

Politechnika
Warszawska

Menażeria (miar błędów)

$$NMAE = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{|y_i - y_i^*|}{C_{norm}}$$

$$sMdAPE = median_{i=1..n}\left(\frac{|y_i - y_i^*|}{y_i + y_i^*} * 200\%\right)$$

$$MAE = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|y_i - y_i^*|$$

$$MaxAE = max_{i=1..n}|y_i - y_i^*|$$

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - y_i^*)^2}$$

względne <> *bezwzględne*

znormalizowane

Politechnika
Warszawska

Kryteria podstawowe dla okresu - bezwzględne

$MAE = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|y_i - y_i^*|$ *MAE (Mean Absolute Error)*

$ME = MBE = BIAS = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - y_i^*)$ *ME (Mean Error), MBE (Mean Bias Error), BIAS*, obciążenie prognozy

$MdAE = median_{i=1\dots n}\,|y_i - y_i^*|$ *MdAE (Median Absolute Error)*

Politechnika
Warszawska

Kryteria dla okresu - bezwzględne

$$MaxAE = max_{i=1\ldots n}\left|y_i - y_i^*\right|$$

MaxAE (Maximum Absolute Error)

$$MSE = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - y_i^*)^2$$

MSE (Mean Square Error)

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - y_i^*)^2}$$

RMSE (Root Mean Square Error)

Politechnika
Warszawska

Kryteria dla okresu – względne

$$MAPE = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{y_i - y_i^*}{y_i}\right| * 100\%$$

MAPE (Mean Absolute Percentage Error)

$$MdAPE = median_{i=1\ldots n}\left(\left|\frac{y_i - y_i^*}{y_i}\right| * 100\%\right)$$

MdAPE (Median Absolute Percentage Error)

$$sMAPE = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{|y_i - y_i^*|}{y_i + y_i^*} * 200\%$$

sMAPE (Symmetric Mean Absolute Percentage Error)

$$sMdAPE = median_{i=1\ldots n}\left(\frac{|y_i - y_i^*|}{y_i + y_i^*} * 200\%\right)$$

sMdAPE (Symmetric Median Absolute Percentage Error)

Kryteria podstawowe dla okresu – inna klasyfikacja

Podstawowa klasyfikacja zwykle dotyczy kwestii czy błąd jest bezwzględny czy względny ale można także wskazać inną klasyfikację – ze względu na rząd momentu błędu.

Najczęściej wyróżnia się kryteria związane z pierwszym rzędem momentu błędu (np. *MAE, BIAS, MAPE*) oraz z drugim rzędem (np. *MSE, RMSE*). Występują także miary związane z czwartym rzędem np. *RMQE*.

Kryteria dla okresu – znormalizowane

$$NMAE = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{|y_i - y_i^*|}{C_{norm}}$$

NMAE (Normalized Mean Absolute Error)

$$NBIAS = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{(y_i - y_i^*)}{C_{norm}}$$

NBIAS (Normalized BIAS) (lub *NME, NMBE)*

$$NMSE = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{y_i - y_i^*}{C_{norm}}\right)^2$$

NMSE (Normalized Mean Square Error)

$$NRMSE = \frac{1}{\mathrm{C_{norm}}}\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - y_i^*)^2}$$

NRMSE (Normalized Root Mean Square Error)

Stosowanie tych miar pozwala porównywać jakość prognoz dla różnych obiektów.

Politechnika Warszawska

Kryteria dla okresu – skumulowane

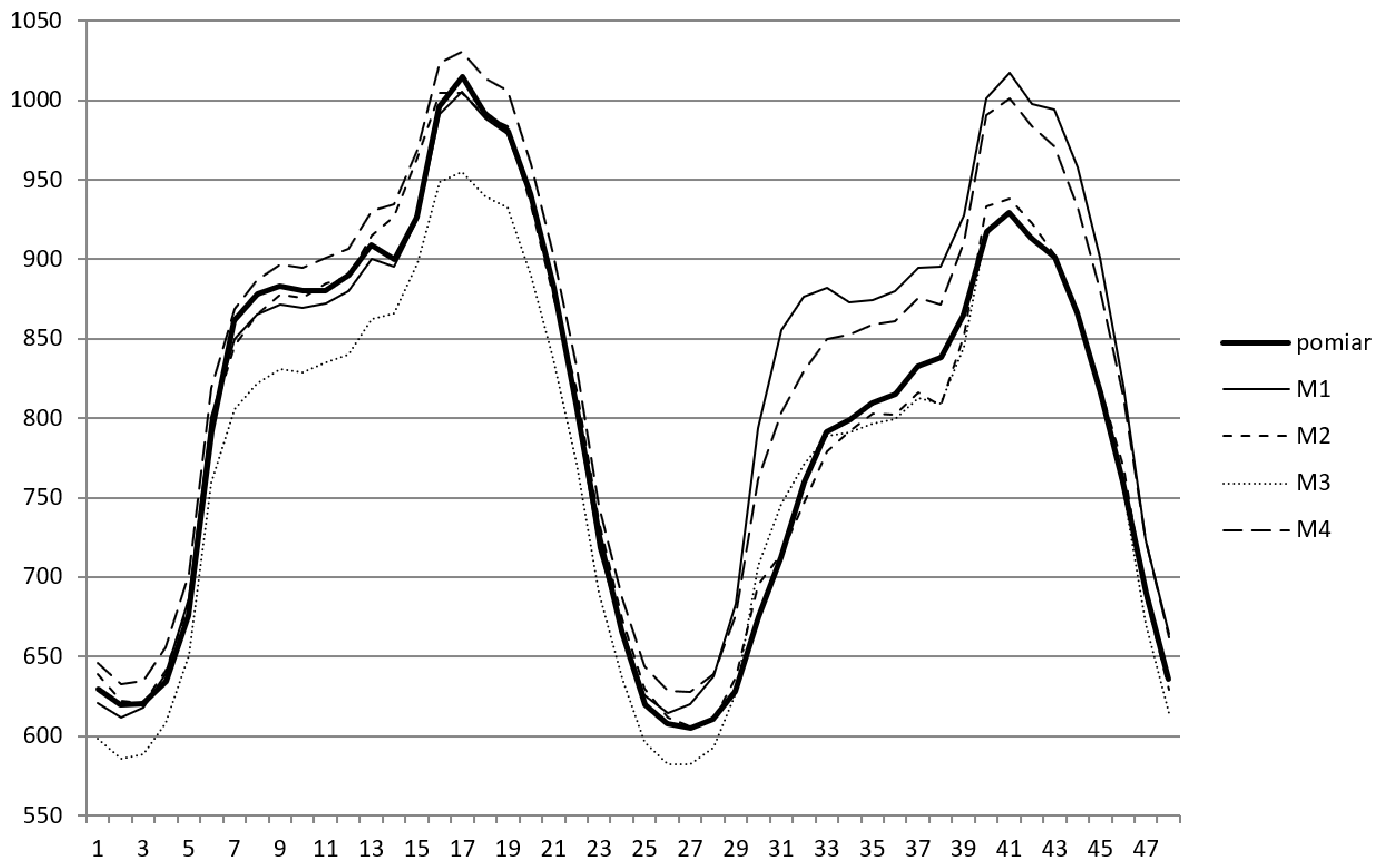
$CE = \sum_{i=1}^{n}(y_i - y_i^*)$ błąd skumulowany *CE* (*Cumulative Error*)

$CPE = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{y_i - y_i^*}{y_i}\right) * 100\%$ *CPE* (*Cumulative Percentage Error*)

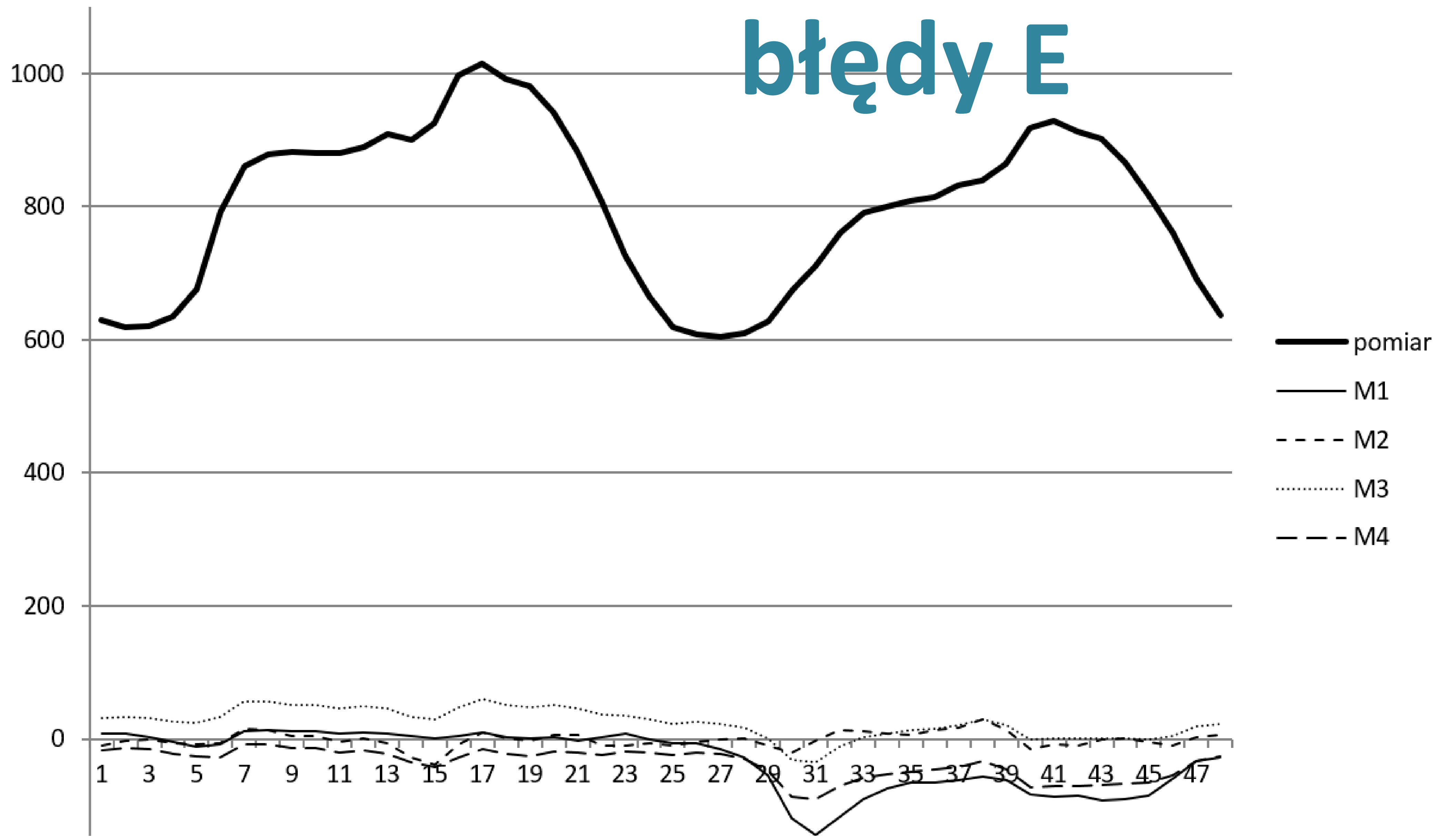
$CumRAEm = \frac{\sum_{i=1}^{n}|y_i - y_i^*|}{\sum_{i=1}^{n}|y_i - y_i^{*b}|}$ *CumRAEm* (*Cumulative Relative Absolute Error*)

Stosowanie tych miar pozwala analizować różne aspekty obciążenia prognozy a na wykresie przebieg i monotoniczność narastania błędu.

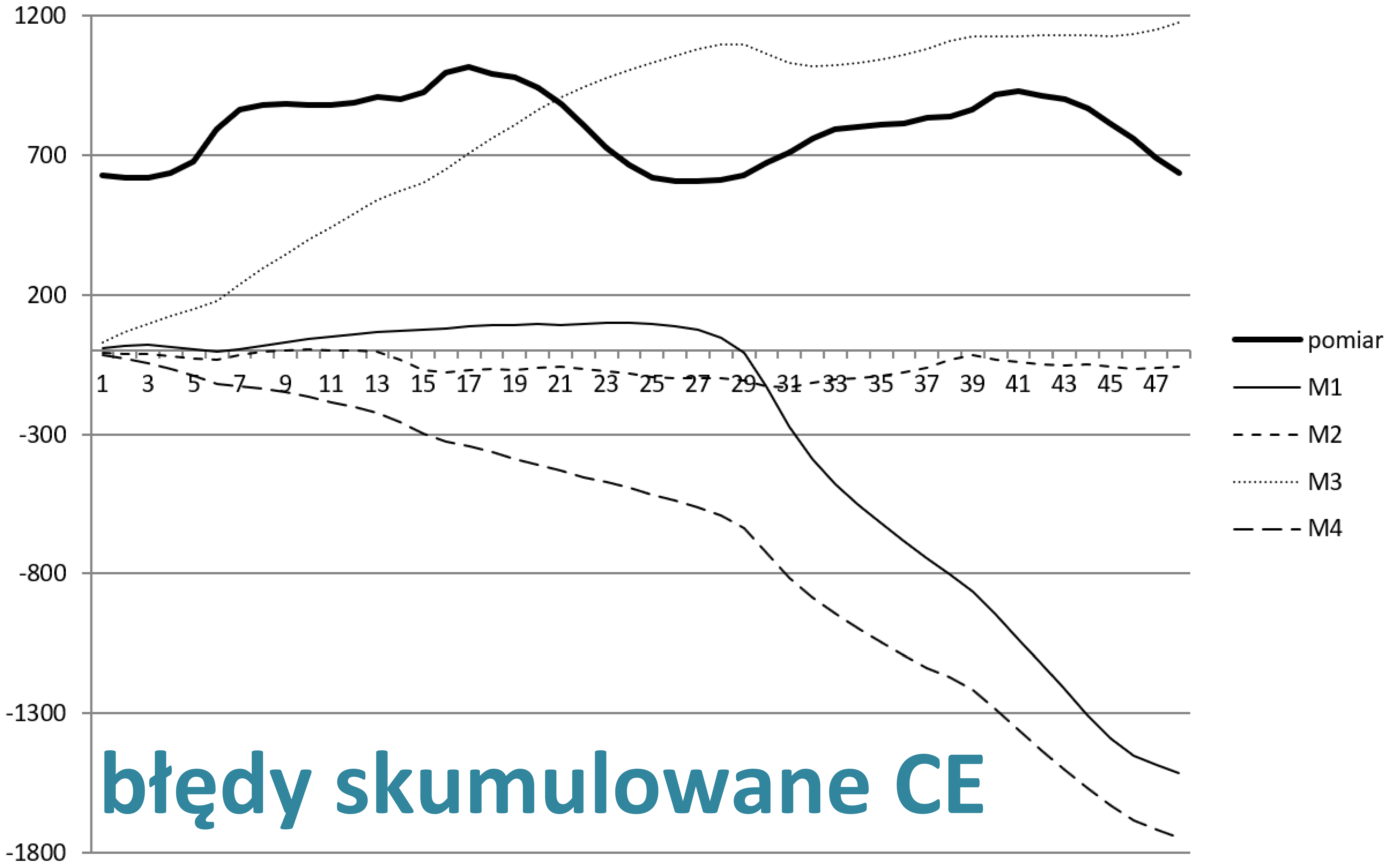
Kryteria dla okresu – skumulowane



prognozy



błędy E



błędy skumulowane CE

Politechnika
Warszawska

Kryteria dla okresu – porównawcze względem metody benchmarkowej (prognoza y_i^{*b})

$$MRAE = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{y_i - y_i^*}{y_i - y_i^{*b}}\right|$$

MRAE (*Mean Relative Absolute Error*)

$$MdRAE = median_{i=1\ldots n}\left|\frac{y_i - y_i^*}{y_i - y_i^{*b}}\right|$$

MdRAE (*Median Relative Absolute Error*)

$$SS = \frac{1}{2}\left[\left(1 - \frac{nMAE}{nMAE_b}\right) + \left(1 - \frac{nRMSE}{nRMSE_b}\right)\right]$$

Skill Score – SS

$$PB(MAE) = 100\% * \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}(I(MAE))$$

PB(MAE) (Percent Better(MAE)):

$$I(MAE) = \begin{cases} 0 \; jeżeli \; MAE < MAE_b \\ 1 \end{cases}$$

Kryteria dla okresu – rozrzut błędów – odchylenie standardowe

$$Std\_AE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(AE_i - MAE)^2}{n-1}}$$

Std_AE (Standard Deviation of Absolute Error)

$$Std\_APE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(APE_i - MAPE)^2}{n-1}}$$

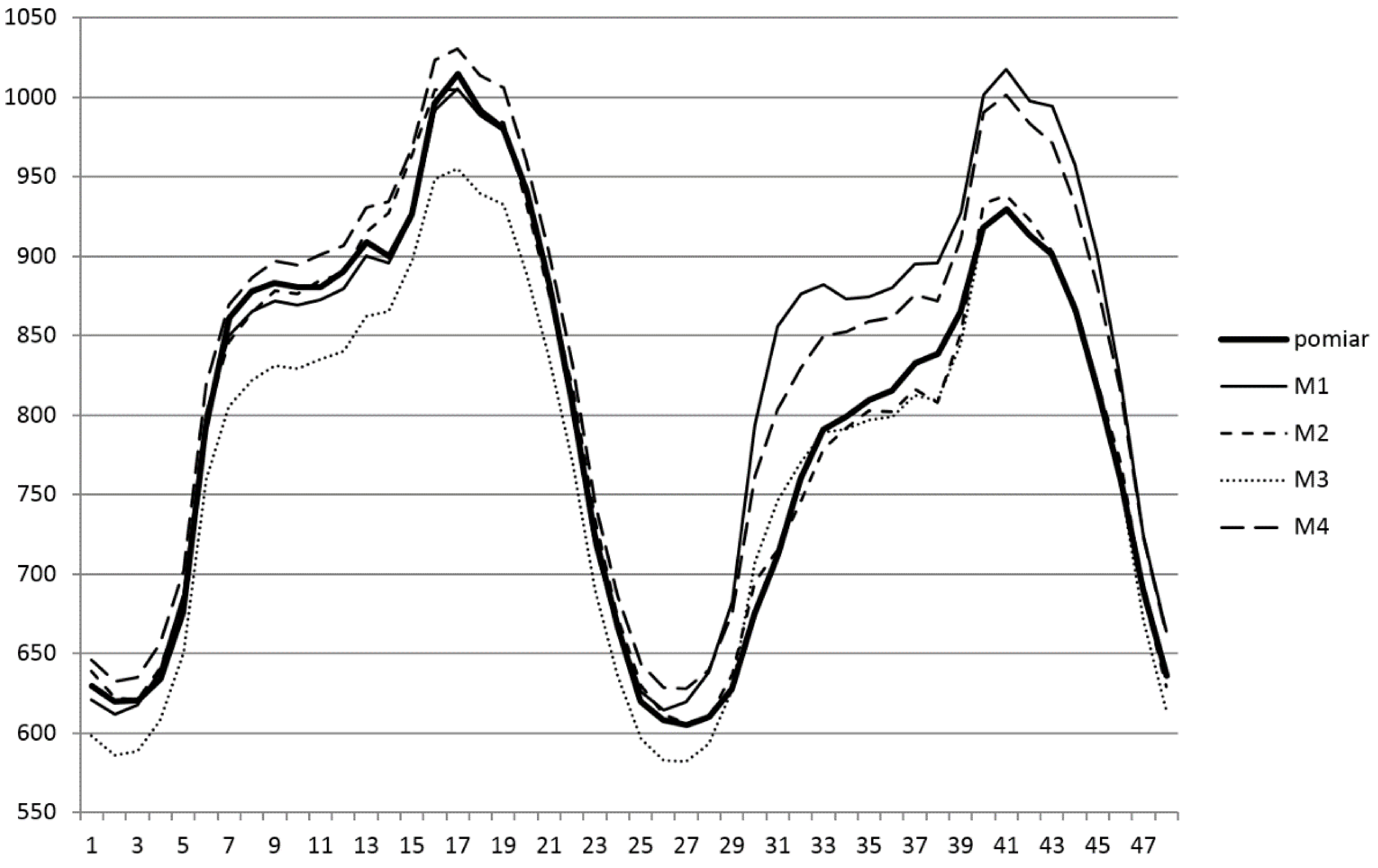
Std_APE (Standard Deviation of Absolute Percentage Error)

Kryteria dla okresu – współczynnik korelacji liniowej Pearsona

$$R = \frac{cov(y_i, y_i^*)}{\sigma_{y_i} * \sigma_{y_i^*}} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})(y_i^* - \overline{y^*})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 \sum_{i=1}^{n}(y_i^* - \overline{y^*})^2}}$$

Współczynnik korelacji liniowej Pearsona określa siłę związku pomiędzy dwoma szeregami czasowymi w sensie **współbieżności liniowej**, którą rozumie się tak, że przyrostowi jednego szeregu czasowego towarzyszy liniowo zależny przyrost drugiego szeregu. Jest on miarą unormowaną i przyjmuje wartości od -1 do +1. Wartości równe zeru oznaczają brak korelacji pomiędzy szeregami.

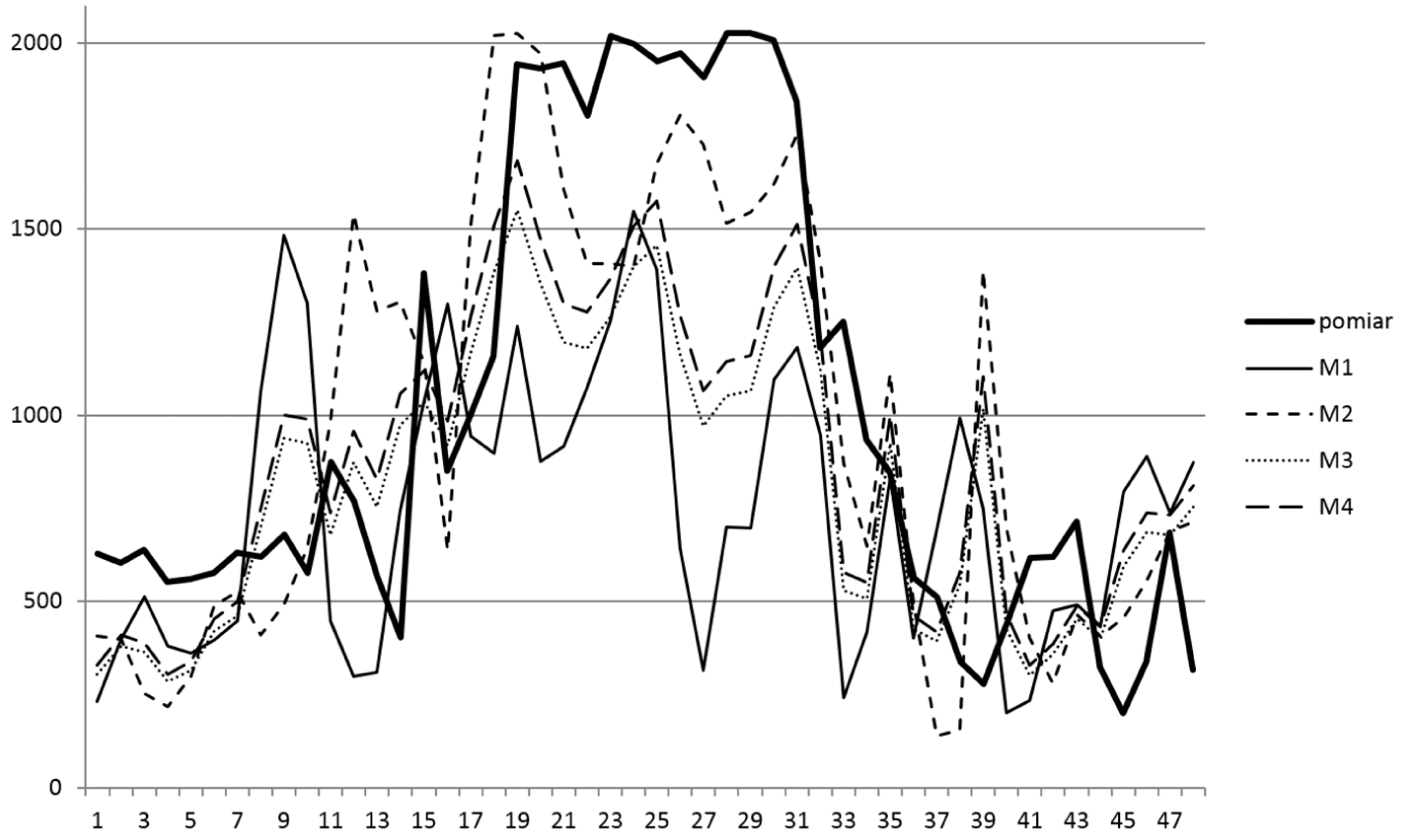
Przykład – fragment OSD



kryterium	Prognozy			
	M1	M2	M3	M4
MAE [MW]	36,87	8,92	27,81	36,36
BIAS [MW]	-31,51	-1,17	24,47	-36,36
MdAE [MW]	11,32	7,14	29,07	26,69
AE95 [MW]	108,42	24,76	54,42	72,26
AE99 [MW]	132,14	34,32	58,05	89,27
MaxAE [MW]	**143,97**	37,73	59,66	91,43
MSE [MW]	2888,78	136,36	1089,78	1802,50
RMSE [MW]	53,75	11,68	33,01	42,46
RMQE [MW]	73,08	17,03	38,69	52,19
GMAE [MW]	16,40	6,11	16,24	30,30
MAPE [%]	**4,68**	1,11	3,47	**4,61**
MdAPE [%]	1,44	0,93	3,95	3,87
sMAPE [%]	4,46	1,11	3,54	4,47
sMdAPE [%]	1,45	0,94	4,03	3,79
NMAE [%]	3,07	0,74	2,32	3,03
NBIAS [%]	-2,63	-0,10	2,04	-3,03
NRMSE [%]	4,48	0,97	2,75	3,54
Std_AE [MW]	39,52	7,61	17,97	22,16
Std_APE [%]	5,09	0,89	2,03	2,84
Korelacja [-]	0,9403	0,9955	0,9841	0,9847

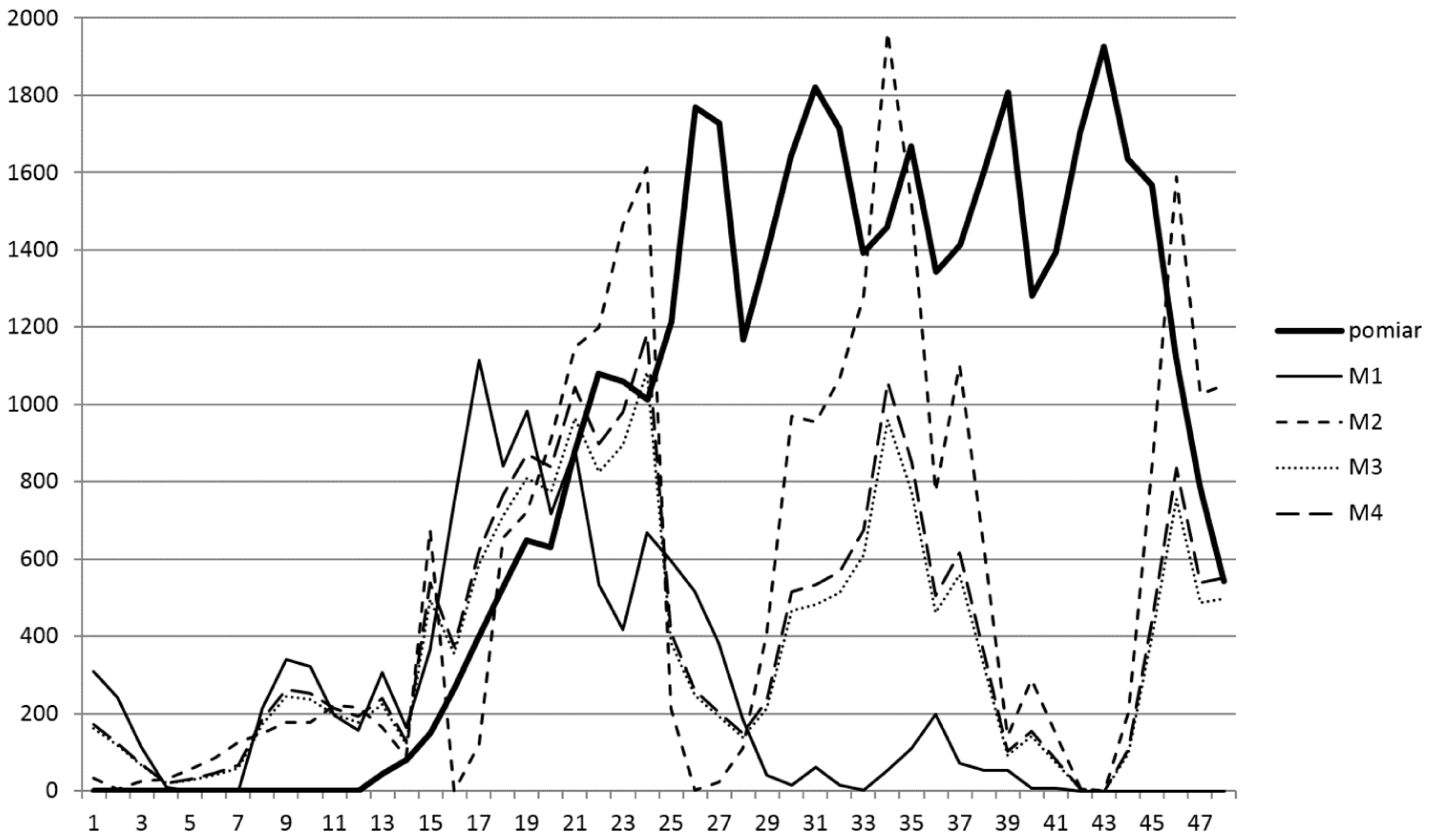
Politechnika
Warszawska

Przykład – turbina wiatrowa
dobre warunki produkcji



	Prognozy			
kryterium	M1	M2	M3	M4
MAE [MW]	511.98	**322.07**	372.18	354.01
BIAS [MW]	264.58	35.41	193.11	125.57
MdAE [MW]	446.50	256.58	295.96	279.90
AE95 [MW]	1327.81	830.00	892.90	837.12
AE99 [MW]	1469.49	1013.34	968.55	874.67
MaxAE [MW]	1592.75	1111.96	976.06	882.86
MSE [MW]	404252.55	160218.95	208435.46	179817.78
RMSE [MW]	635.81	400.27	456.55	424.05
RMQE [MW]	828.89	538.88	575.16	528.09
GMAE [MW]	367.87	235.18	260.37	270.82
MAPE [%]	62.02	**49.23**	**46.28**	47.75
MdAPE [%]	45.44	30.34	36.23	32.15
sMAPE [%]	58.96	40.87	42.60	40.48
sMdAPE [%]	51.78	35.43	42.70	37.64
NMAE [%]	42.67	26.84	31.01	29.50
NBIAS [%]	22.05	2.95	16.09	10.46
NRMSE [%]	52.98	33.36	38.05	35.34
Std_AE [MW]	380.98	240.20	267.22	235.91
Std_APE [%]	56.28	66.27	48.65	55.32
Korelacja [-]	0.4076	0.7805	0.7626	0.7658

Przykład – turbina wiatrowa
zmienne warunki produkcji



	Prognozy			
kryterium	M1	M2	M3	M4
MAE [MW]	805.81	553.97	617.86	608.92
BIAS [MW]	622.03	322.32	492.18	458.42
MdAE [MW]	629.63	296.02	277.13	258.11
AE95 [MW]	1734.85	1701.70	1642.92	1639.12
AE99 [MW]	1847.54	1851.09	1826.12	1822.13
MaxAE [MW]	1926.50	1926.50	1926.50	1926.50
MSE [MW]	1041982.37	598966.99	717186.96	690854.23
RMSE [MW]	1020.78	773.93	846.87	831.18
RMQE [MW]	1239.63	1063.16	1097.12	1084.09
GMAE [MW]	0 (błąd)	285.62	323.32	324.06
MAPE [%]	∞ (błąd)	∞ (błąd)	∞ (błąd)	∞ (błąd)
MdAPE [%]	∞ (błąd)	∞ (błąd)	∞ (błąd)	∞ (błąd)
sMAPE [%]	∞ (błąd)	114.98	119.84	118.18
sMdAPE [%]	∞ (błąd)	119.71	125.02	119.88
NMAE [%]	67.15	46.16	51.49	50.74
NBIAS [%]	51.84	26.86	41.01	38.20
NRMSE [%]	85.06	64.49	70.57	69.26
Std_AE [MW]	633.25	546.17	585.30	571.74
Std_APE [%]	∞ (błąd)	∞ (błąd)	∞ (błąd)	∞ (błąd)
Korelacja [-]	-0.2219	0.3686	0.2147	0.2222

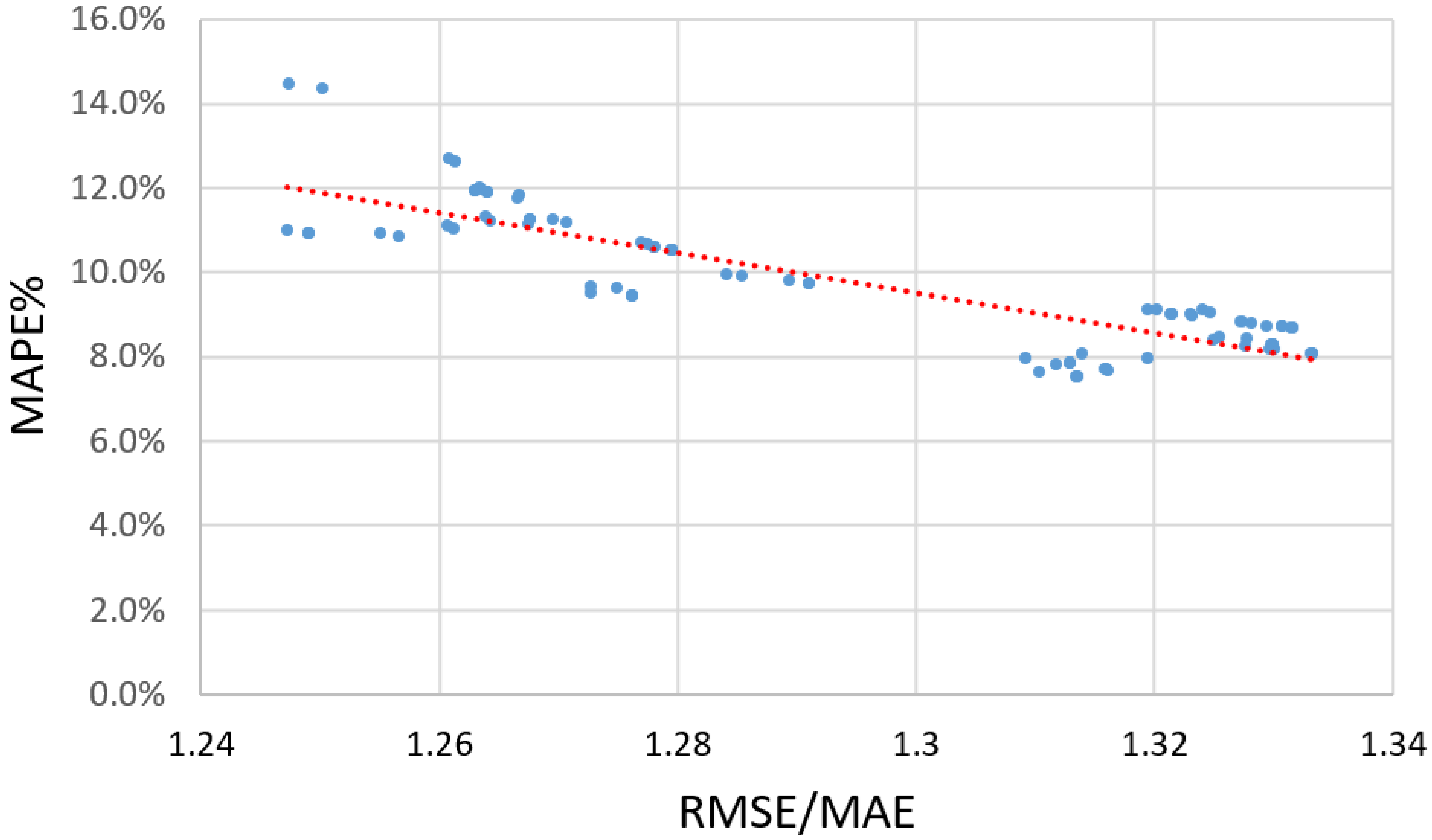
Politechnika
Warszawska

Analiza miar błędów.

Prognozy cen energii elektrycznej (rynek włoski IPEX) – horyzont 1 doba.

Wizualizacja wyników różnych wariantów jednego modelu - regression splines decomposition (RSD)

Korelacja R=-0,866



Wnioski

1. „Nieidealne prognozy nieidealnych modeli” – **optymalizując jedno kryterium zwykle powodujemy pogarszanie** innego kryterium.
2. Dlatego ważne jest jasne postawienie **celu prognozy** (cel biznesowy) – i na tej podstawie dobór „kluczowego” lub „wiodącego” kryterium prognozy, które zostanie następnie użyte jako funkcja „straty” (celu) dla modelu prognostycznego.
3. Można także wykorzystać optymalizację wielokryterialną w celu zminimalizowania dwóch lub większej liczby kryteriów jednocześnie.
4. Bardzo ważny jest dobór właściwych miar jakości przy porównywaniu prognoz z różnych okresów czasowych dla jednego obiektów i dla różnych obiektów.

Dziękuję za uwagę